15/02/16

$T: V \to W$ γραμ. απεικόνιση $e = (e_1 \dots e_\mu)$ διατεταγμένη βάση του V, $g = (g_1, \dots g_\nu)$ διατεταγμένη βάση του W, $[T]_e^g \in \mathbb{F}^{\dim W \times \dim V} = \mathbb{F}^{\nu \times \mu}$

Στήλες αντιστοιχούν στη γραμμή του $\tau(e)$ συναρτήσει της g

- Πρόταση

Αν $v \in V$ τότε $[F(v)]_g = [T]_e^g [v]_e$

- Πρόταση

Έστω $f_1 : V \to W$, $f_2 : W \to Z$ γραμμικές

$e = (e_1, \dots, e_\mu)$ (διατ) βάση του V,

$g = (g_1, \dots, g_\ell)$ (διατ) βάση του W και

$h = (h_1, \dots, h_a)$ (διατ) βάση του Z

Ξέρουμε ότι $f_1 \circ f_2 : V \to Z$ είναι γραμμική

Τότε ισχύει

$$[f_2 \circ f_1]_e^h = [f_2]_g^h \cdot [f_1]_e^g$$

γινόμενο πινάκων

Απόδειξη

Έστω $[f_1]_e^g = (a_{ij})$, $[f_2]_g^h = (b_{ij})$

Τότε

$\longrightarrow f_1(e_i) = \sum_{t=1}^{p} a_{ti} g_t \ \forall i \quad f_2(g_t) = \sum_{k=1}^{q} b_{kt}$

Άρα $(f_2 \circ f_1)(e_i) = f_2(f_1(e_i)) =$

$= f_2\left(\sum_{t=1}^{p} a_{ti} g_t\right) = \sum_{t=1}^{p} a_{ti} f(g_t) = \sum_{t=1}^{} a_{ti} \left(\sum_{k=1}^{q} b_{kt} h_k\right)$

$= \sum_{t=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{q} a_{ti} b_{kt} h_k \right) = \sum_{k=1}^{q} \left(\sum_{t=1}^{p} (b_{kt} a_{ti}) h_k \right)$

Το ζητούμενο έπεται γιατί ο πίνακας

$[f_2]_g^h [f_1]_h^e$ έχει (k,i) συντεταγμ. ίση με $\sum_{t=1}^{p} b_{kt} a_{ti}$ από τον ορισμό του γινομένου πινάκων

Πόρισμα: Έστω $f: V \to W$ ισομορφισμός δx e ~~διαστ.~~ βάση του V, g διατεταγμένη βάση του W

Ξέρουμε ότι $\dim V = \dim W$ από προηγούμενα

άρα ο πίνακας $[f]_e^g$ είναι τετραγωνικός

$\to$ Ισχύει $[f]_e^g$ αντιστρέψιμος

και $([f]_e^g)^{-1} = [f^{-1}]_g^e$

Απόδειξη

Αφού f ισομορφισμός των χώρων $\exists$ η $f^{-1}: W \to V$, είναι γραμμική και ισχύει $f \circ f^{-1} = id_W$ και $f^{-1} \circ f = id_V$

Από την πρόταση

$[id_W]_g^g = [f \circ f^{-1}]_g^g = [f]_e^g [f^{-1}]_g^e$

Αλλά $[id_W]_g^g = I_{\dim W}$ ταυτοτικός

(γιατί αν $g = (g_1, \dots, g_e)$ τότε $id_W(g_i) = g_i$
$= 0g_1 + 0g_2 + \dots 0g_{i-1} + 1g_i + 0g_{i+1} +$
$\dots + 0g_e$)

Άρα $\rightarrow [f]^g_e [f^{-1}]^e_g = I_{\dim W}$ Ομοίως,
από $f^{-1} \circ f = id_V \Rightarrow [f^{-1}]^e_g [f]^g_e =$

$= [I_{dV}]^e_e = I_{\dim V} = I_{\dim W} \Rightarrow$ Το αποτέλεσμα έπεται

Π.χ

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_1[x]$ $f(a,b) = ax + (b-a)$
$e = (e_1 = (1,0), e_2 = (0,1))$ Βάση του $\mathbb{R}^2$
$g = (g_1 = x, g_2 = 1)$ Βάση του $\mathbb{R}_1[x]$

Η f γραμμική, $\ker f = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$, f επί $\Rightarrow$
$f^{-1}: W \to V$
$f^{-1}(\hat{a} x + \hat{b}) = (\hat{a}, \hat{b} + \hat{a})$

Υπολογ. $[f]^g_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Επίσης $f^{-1}(g_1) = (1,1) = e_1 + e_2$ Άρα
$[f^{-1}]^e_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
$f^{-1}(g_2) = (0,1) = e_2$

Εύκολα βλέπουμε
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ Άρα η πρόταση ισχύει στο παράδειγμα

Πρόταση

Έστω $e=(e_1,\dots,e_n)$ διατ βάση του V,

$g=(g_1,\dots,g_m)$ διατ βάση του W

Τότε $[f_1+f_2]_e^g = [f_1]_e^g + [f_1]_e^g$ και

$[\lambda f_1]_e^g = \lambda [f_1]_e^g$

Απόδειξη

Έστω $[f_1]_e^g = (a_{ij})$, $[f_2]_e^g = (b_{ij})$

Τότε $\left.\begin{aligned} f_1(e_i) &= \sum_t a_{ti} g_t \\ f_2(e_i) &= \sum_t b_{ti} g_t \end{aligned}\right\} \Rightarrow (f_1+f_2)(e_i) =$

$= f_1(e_i) + f_2(e_i) = \sum_t a_{ti} g_t + \sum b_{ti} g_t =$

$= \sum_t (a_{ti} + b_{ti}) g_t \Rightarrow [f_1+f_2]_e^g =$

$= [f_1]_e^g + [f_2]_e^g$ όμοια αποδεικνύεται

και $[\lambda f]_e^g = \lambda [f]_e^g$

• Πρόταση Έστω V, W δ.χ. Αν e (διατ)

Βάση του V, g (διατ.) βάση του W και $A \in \mathbb{F}^{\dim W \times \dim V}$ τότε $\exists$ μοναδική

$f: V \to W$ γραμμική με $A = [f]_e^g$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω

$e = (e_1, \dots, e_\mu)$ $g = (g_1, \dots, g_\rho)$ και

$A = (a_{ij}) \in \mathbb{F}^{\overset{\dim W}{\rho} \times \overset{\dim V}{\mu}}$

Θέτουμε για $1 \le i \le \mu$, $w_i = \sum_{t=1}^{\rho} a_{ti} g_t \in W$

Από Πρότ. I $\exists$ (μοναδικό)

γραμμική $f: V \to W$ με $f(e_i) = w_i$

$\forall$ i με $1 \le i \le \mu$

Φανερό, $[f]_e^g = A$, γιατί $f(e_i) = w_i =$

$= \sum_{t=1}^{\mu} a_{ti} g_t$

<u>Μοναδικότητα</u>

Έστω και $f': V \to W$ με $[f']_e^g = A$

Τότε $f'(e_i) = w_i = f(e_i)$ $\forall i$ Άρα τα e_i

παράγουν του V και f, f' γραμμικές έπεται

$f = f'$ σαν απεικ $V \to W$

Π.χ.

Εστω $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}^2$

$e = (e_1 = (1,0,0),\ e_2(0,1,0),\ e_3(0,0,1))$

Βάση του $\mathbb{R}^3 = V$

$g = (g_2 = (0,1),\ g_1 = (1,0))$ Βάση του $W = \mathbb{R}^2$

Εστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\dim W \times \dim V}$

Υπολογίστε τη μοναδική γραμμική $f: V \to W$ με $[f]_e^g = A$

Λύση

Πρέπει $f(e_1) = 1g_1 - g_2 = (1,0) - (0,1) = (1,-1)$

$f(e_2) = \dots (0,-2)$

$f(e_3) = 7g_1 \dots = (7,-3)$

Εστω $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ έχουμε

$f((x,y,z)) = f(xe_1 + ye_2 + ze_3)$

$= f(xe_1) + f(ye_2) + f(ze_3) =$

$= x f(e_1) + y f(e_2) + z f(e_3) =$

$= x(1,-1) + y(0,-2) + z(7,-3) =$

$= (x + 7z,\ -x - 2y - 3z)$

Ο διανυσματικός χώρος $\mathcal{L}(V,W)$

Ορισμός

Έστω $\mathbb{F}$ σώμα V, W δ.χ. επί του $\mathbb{F}$. Θέτουμε

$\mathcal{I}(V, W) = \{ f: V \to W$ με f γραμμική$\}$

Αυτό είναι γραμμ. απεικ. από το V στο W

με πράξεις $+$ ως εξής: Αν $f_1, f_2 \in \mathcal{I}(V,W)$ τότε $f_1 + f_2 : V \to W$ με $(f_1 + f_2)(v) = f_1(v) + f_2(v) \; \forall v \in V$

$\cdot$ ως εξής: Αν $\lambda \in \mathbb{F}$ και $f \in \mathcal{I}(V, W)$ τότε $\lambda f : V \to W$ με $(\lambda f)(v) = \lambda f(v)$

▶ Πρόταση

Με τις παραπάνω πράξεις $+, \cdot$ ο $\mathcal{I}(V,W)$ είναι δ.χ. χώρος επί του $\mathbb{F}$

Απόδειξη

Εύκολη επαλήθευση των αξιωμάτων δ.χ. [(Άσκηση)]

▶ Πρόταση

Έστω e βάση του V και g βάση του W. Ορίζουμε $T: \mathcal{I}(V, W) \to \mathbb{F}^{\dim W \times \dim V}$ με $T(f) = [f]_e^g$

$\forall \; f: V \to W$ γραμμ.

Έχουμε δείξει ότι T είναι 1-1 και ότι επίσης δείξαμε T γραμμική. Άρα T ισομ.
δ.χ

=> Πόρισμα

Αφού $\mathcal{I}(V,W)$ και $\mathbb{F}^{\dim W \times \dim V}$ είναι ισόμορφοι, έχουμε $\dim \mathcal{I}(V,W) = \dim \mathbb{F}^{\dim W \times \dim V} = (\dim W)(\dim V)$

π.χ

αν $\dim V = 3$, $\dim = 4$
$\Rightarrow \dim \mathcal{I}(V,W) = 3 \cdot 4 = 12$

Εφαρμογή

Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu \times \rho}$, $B \in \mathbb{F}^{\rho \times \sigma}$
$C \in \mathbb{F}^{\sigma \times \mu}$ δείξτε (Γραμμ I)
$A(BC) = (AB)C$ Από αυτά που ξέρουμε ήδη
$\left([f_1 \circ f_2]_e^g = [f_1]_e^g [f_2]_e^e \right)$
και την προσεταιρ. της σύνθεσης συναρτήσεων, παίρνουμε μια απόδειξη που θεωρητικά αποδ. ότι γινόμενο πινάκων είναι προσεταιριστικό.